Univerza v Ljubljani

Fakulteta za elektrotehniko

IZRAČUN MEHANSKIH LASTNOSTI IN DEFORMACIJ ENOSTRANSKO IN DVOSTRANSKO VPETEGA NOSILCA

Seminarska naloga pri predmetu **Razdelilna in industrijska omrežja**

Maks Dragan

Izvajalec predmeta: Mentor: prof. dr. Grega Bizjak, univ. dipl. inž. el.

Študijsko leto **2017/18**

Povzetek

Seminarska naloga vključuje osnovno teoretsko ozadje, potrebno za razumevanje odziva nosilcev na obremenitev. Razložen je prožnostni modul ter Euler-Bernoullijeva teroija nosilcev, s pomočjo katere je moč izračunati reakcijske sile in upogibni moment nosilca ter upogib. Predstavljena je analiza preprostih sistemov z določenimi poenostavitvami.

Ključne besede: Prožnostn modul, teorija nosilcev, upogibni moment, strižna sila, upogibnica

Kazalo

1. Uvod

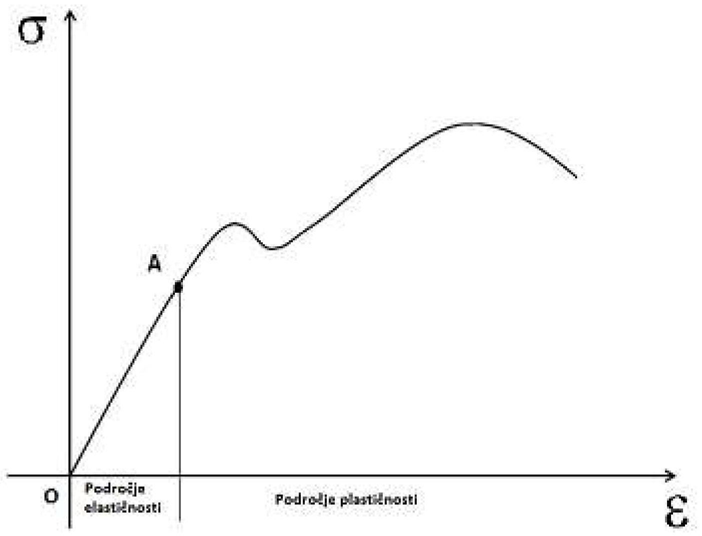
Pojmem nosilec v inženirstvu označuje ustrezno podprto, vitko horizontalno strukturo, namenjeno prenašanju obremenitev, ki so pravkotne njegovi vzdolžni osi. Take obremenitve se imenujejo prečne obremenitve. Odziv nosilca na breme je odvisen od teže bremena, geometrijske postavitve sistema ter od mehanskih lastnosti nosilca. Največkrat opazujemo upogiba nosilca pri določeni obremenitvi.

2. Osnovna teorija

2.1 Mehanska napetost, relativni raztezek ter prožnostni modul

Pri obremenjenem nosilcu se (pogojeno z geometrijo primera) nosilec deformira. Določeni deli nosilca se podaljšajo, določeni skrajšajo. Za obravnavo takih problemov je potrebno poznati odziv trdnih materialov na obremenitev. Predvsem je pomembna količina E $\left[\frac{N}{m^2} = Pa\right]$, imenovana prožnostni modul.

Slika (1) prikazuje odziv večine trdnih materialov na obremenitev.



Slika 1: Graf mehanske napetosti v odvisnosti od relativnega raztezka

Na ordinatno os je postavljena mehanska napetost σ$[N/m^2]$, ki predstavlja silo na enoto površine, ki pri nosilcih nastane zaradi obremenitve in je definirana:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1}$$

Na abscisni osi pa je predstavljen relativni raztezek ε [ ] in predstavlja fizično deformacijo, ki je posledica mehanske napetosti. Zapišemo jo kot razmerje med spremembo dolžine materiala zaradi vpliva mehanske napetosti in prvotno dolžino:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{2}$$

Točka A predstavlja mejo elastičnosti. Na diagramu levo od meje elastičnosti je področje elastičnosti oziroma področje elastičnih deformacij. To so deformacije, kjer so relativni raztezki sorazmerni mehanski napetosti in če napetost odstranimo, je deformacija reverzibilna (material se povrne v prvotno stanje). V tem področju velja Hookov zakon:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3}$$

Na grafu desno od meje elastičnosti material preide v področje plastičnih deformacij. Ko se zaradi dovolj velike obremenitve material deformira preko te meje, se tudi po odstranitvi mehanske napetosti ne povrne v prvotno stanje. V tem področju Hookov zakon ne velja, izrazita je nelinearnost, obravnava takih primerov pa presega obseg te seminarske naloge.

E torej predstavlja naklon krivulje - razmerje med mehansko napetostjo in relativnim raztezkom v področju elastičnosti, imenovano prožnostni modul (večkrat tudi Youngov modul). Govori o togosti materiala; večji kot ima trdni material prožnostni modul, večja sila je potrebna za njegovo deformacijo.

Prožnostni modul bistveno vpliva na odziv nosilcev na obremenitev (kar bo bolj razvidno v naslednjem podpoglavju), zato so v tabeli (1) zbrani prožnostni moduli za pogosto uporabljene materiale.

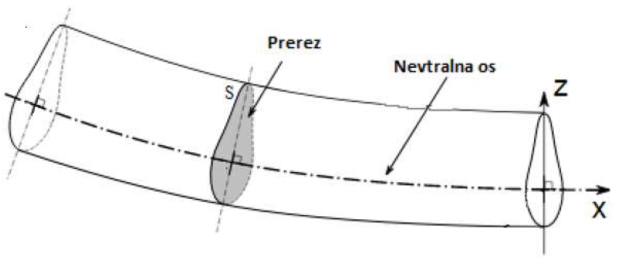
Tabela 1: Prožnostni modul nekaterih materialov

Material	**Prožnostni modul E [GPa]**
Les	11
Ojačan beton	30
Steklo	50-90
Aluminij	69
Baker	117
Jeklo	209
Diamant	1050-1210

2.2 Euler-Bernoullijeva teorija nosilcev

Bernoulli in Euler sta razvila matematičen model, ki opisuje odziv (odmik) nosilca iz prvotne lege pod vplivom bremena. Poudariti je potrebno, da je ta teorija poseben primer Timoshenkove teorije nosilcev, saj podaja odvisnost odmika nosilca pod vplivom samo bremen, ki delujejo prečno na nosilec.

V naslednjih enačbah in razlagi je pomembna izbira koordinatnega sistema. Koordinatni sistem je pri analizi nosilcev običajno postavljen tako, da x os predstavlja kar nevtralno os nosilca in je postavljena skozi masno središče nosilca. Gor je usmerjena os z, os y pa kaže »v papir«. Postavitev koordinatnega sistema je vidna na sliki (2).



Slika 2: Skica nosilca s postavljenim koordinatnim sistemom in nevtralno osjo

Odvisnost odmika nosilca od bremena podaja Euler-Bernoullijeva enačba:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2\Delta(x)}{dx^2}\right) = q \quad (4)$$

$q\left[\frac{N}{m}\right]$ v enačbi predstavlja silo na enoto dolžine, ki nastane zaradi bremena in deluje pravokotno na os x. $\Delta(x)[m]$ je krivulja, imenovana upogibnica. Opisuje odmik nosilca v z-osi za vsak x; opiše odmik vsake točke vzdolž nosilca glede na začetno lego. E je prožnostni modul, razložen v prejšnjem poglavju. $I[m^4]$ je vztrajnostni moment ploskve. Je geometrijska lastnost površine, določa pa se glede na os, ki gre skozi masno središče nosilca, kjer je predpostavljeno: $y = z = 0$. Izračuna se po enačbi (5):

$$I = \int\int z^2 dydz \quad (5)$$

Poleg zahtevane smeri obremenitve, teorija vključuje še druge poenastavitve, kar zahteva, da:

- ima nosilec po celotni dolžini enak prerez,
- je nosilec na začetku raven,
- je nosilec homogen,
- so odmiki dovolj manjhni, da nosilec ostane v področju elastičnosti (E je konstanta) in njihov odmik ne spremeni bistveno geometrije primera.

Tako sta za dan primer E in I konstantna, odmik (upogibnica) $\Delta(x)$ in obremenitev $q(x)$ pa povezana v poenostavljeni enačbi:

$$EI\frac{d^4\Delta(x)}{dx^4} = q(x) \tag{6}$$

Za kopico enostavnih geometrijskih in obremenilnih primerov je funkcija upogibnice znana, za določitev upogibnice poljubnega primera pa je potrebno rešiti zgornjo enačbo.

Z upogibom tesno povezana količina je upogibni moment M $[Nm]$, ki je očitno posledica bremena in deluje v smeri y osi. Pri izbrani postavitvi koordinatnega sistema mora biti upogibni moment pozitiven pri silah, ki delujejo v pozitivni smeri z osi. V definiciji za upogibni moment (enačba (7)) je $-$ postavljen ravno zato, da zgotovi to zahtevo:

$$M(x) = -EI\frac{d^2\Delta}{dx^2} \tag{7}$$

Poleg navora pa v obremenjenem nosilcu nastopa tudi strižna sila V [N]. Deluje prečno na nosilec in je definirana z odvodom navora:

$$V(x) = -\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right) \tag{8}$$

3. Analiza in primeri

Analiza nosilcev vključuje izračun reakcije nosilca (tj. strižna sila, upogibni moment ter odmik nosilca). Vključeni so izsledki analize nosilca vpetega na enem koncu ter nosilca vpetega na obeh koncih. Prvi je primer statično določenega nosilca, slednji pa statično nedoločenega. Z izrazom vpetega (na enem ali obeh koncih) je poudarjeno fiksiranje nosilca tako, da je nosilcu pri vpetem koncu onemogočeno vertikalno premikanje ter rotacija.

Za določitev upogiba v posameznih točkah na nosilcu oziroma za določitev upogibnice je po enačbi (7) potrebno določiti samo funkcijo upogibnega momenta M(x) ter rešiti diferencialno enačbo 2. reda.

3.1 Nosilec vpet na enem koncu z enakomerno porazdeljeno obremenitvijo

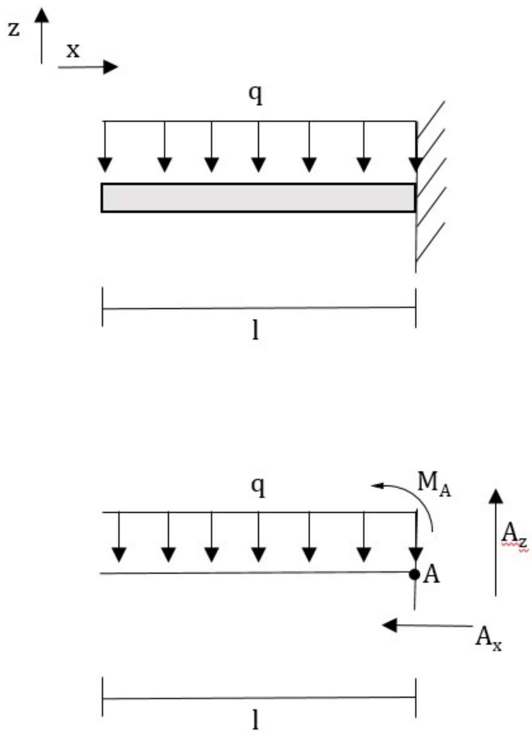
Pri statično določenih nosilcih je vedno moč priti do rešitve z uporabo ravnotežnih enačb, ki veljajo povsod v sistemu; vsota sil v smeri x je enaka 0, vosta sil v smeri z je enaka 0 ter vsota navorov je enaka 0:

$$\sum F_x = 0 \tag{9}$$

$$\sum F_z = 0 \tag{10}$$

$$\sum M = 0 \tag{11}$$

Sledi postopek določitve funkcije strižne sile in upogibnega navora za vse točke na nosilcu, pri čemer je ta obremenjen z enakomerno porazdeljeno obremenitvijo.

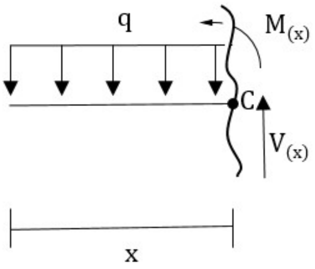


Slika 3: Skica k izračunu nosilca vpetega na eni strani in enakomerno porazdeljeno obremenitvijo

$q\ \left[\frac{N}{m}\right]$ predstavlja obremenitev na enoto površite in je konstanta po celotni dolžini nosilca, dolžine $l\ [m]$. Najprej skico nosilca poenostavimo ter v izbrani točki (A) zapišemo ravnotežne enačbe. Tako dobimo reakcijske sile ter navor nosilca, ki so posledica obremenitve. $A_x\ [N]$ in $A_z\ [N]$ predstavljata reakcijski sili v x in z osi v točki A. $M_A\ [Nm]$ pa označuje upogibni moment v točki A. Z uporabo enačb (9),(10),(11) določimo:

$$A_x = 0$$
$$A_z = ql$$
$$M_A = -\,q\frac{l^2}{2}$$

Tako je moč izračunati reakcijo nosilca v izbrani točki. Kot omenjeno, pa nas zanimata $M(x)$ in $V(x)$. Navidezno vodinik prerežemo na arbitrarnem mestu (točka C) dolžine x ter v tej točki ponovno zapišemo ravnotežne enačbe. Za pravilen rezultat ni pomembno kateri segment (levi ali desni) » je uporabljen«, zato se odločimo za tistega, ki je enostavnješi. Iz dobljenih enačb izrazimo željeni funkciji (tokrat enačbo (9) preskočimo, saj v smeri x ne deluje nobena sila):



Iz enačbe (10) dobimo:

$$V(x) = qx$$

Iz enačbe (11) pa:

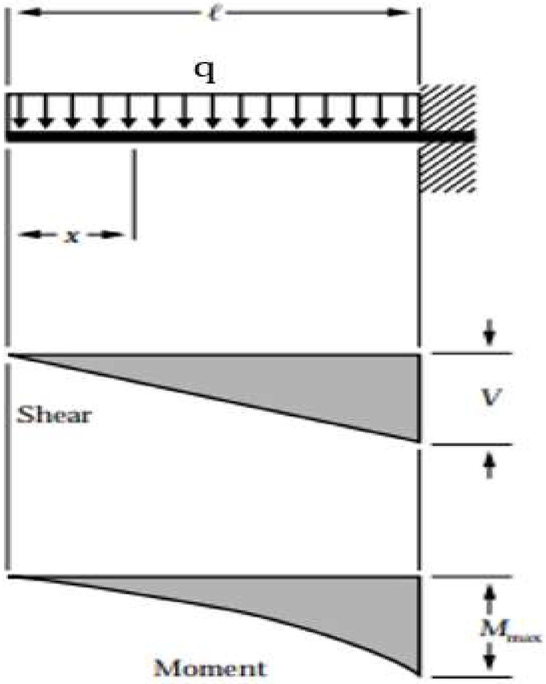
$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

Za izračun upogibnice $\Delta(x)$ lahko uporabimo enačbo (7), iz katere izrazimo $\Delta(x)$ in jo z dvojno integracijo tudi določimo:

$$\Delta(x) = \int\int \frac{M(x)}{EI}\, d^2x = -\frac{q}{24EI}(x^4 - 4l^3x + 3l^4)$$

Potek strižne sile in upogibnega momenta je narisan in poleg prej izračunanih funkcij, predstavljen v tabeli (2).

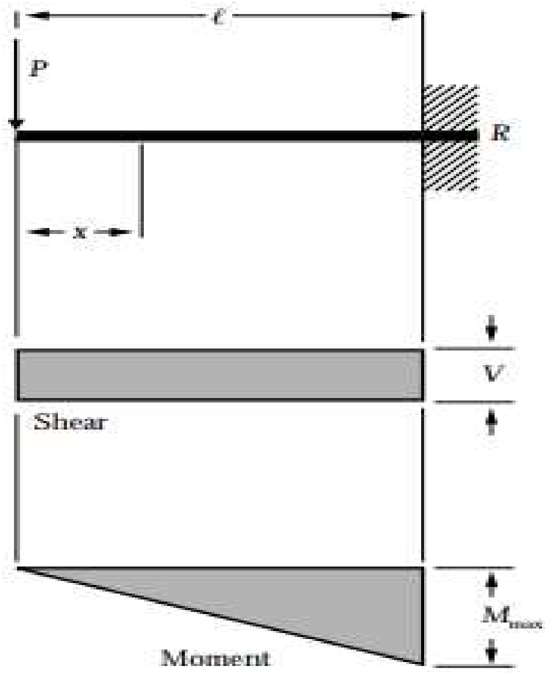
Tabela 2

	$V(x) = qx$ $M(x) = -\frac{qx^2}{2}$ $\Delta(x) = -\frac{q}{24EI}(x^4 - 4L^3x + 3l^3)$

3.2 Nosilec vpet na enem koncu s točkasto obremenitvijo na drugem koncu

Gre za zelo podoben primer prejšnem – postopek reševanja je enak, rezultati pa so zbrani v tabeli (3).

Tabela 3

	$V(x) = P$ $M(x) = Px$ $\Delta(x) = \frac{P}{6EI}(2l^3 - 3l^2x + x^3)$

3.3 Nosilec vpet na obeh koncih z enakomerno porazdeljeno obremenitvijo ter s točakasto obremenitvijo na sredini

Kot omenjeno, primeri nosilcev vpetih na obeh koncih, so v splošnem statično nedoločeni. V takih primerih je potrebno rešiti Euler-Bernoullijevo enačbo (enačba(6)) pri primernih robnih pogojih. Analitične rešitve so možne samo za enostavne primere, pri katerih si lahko pomagamo s superpozicijo in drugimi tehnikami. Tabela (4) prikazuje rezultat za enakomerno porazdeljeno obremenitev, tabela (5) pa za točkasto obremenitev na sredini nosilca.

Tabela 4

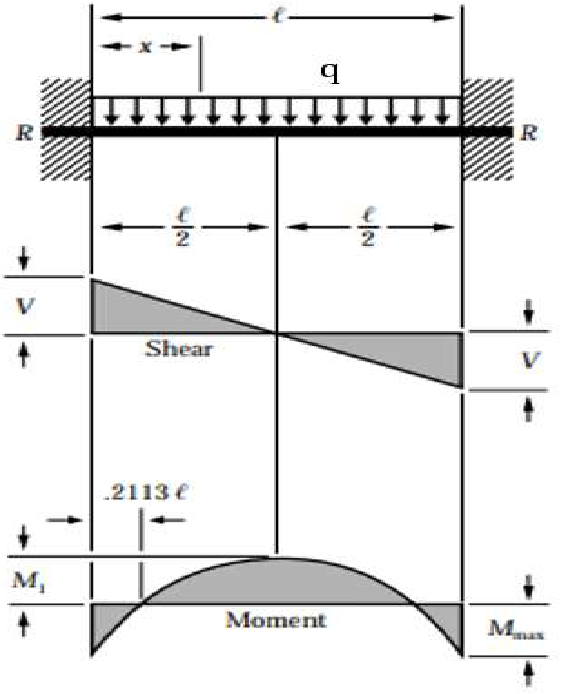
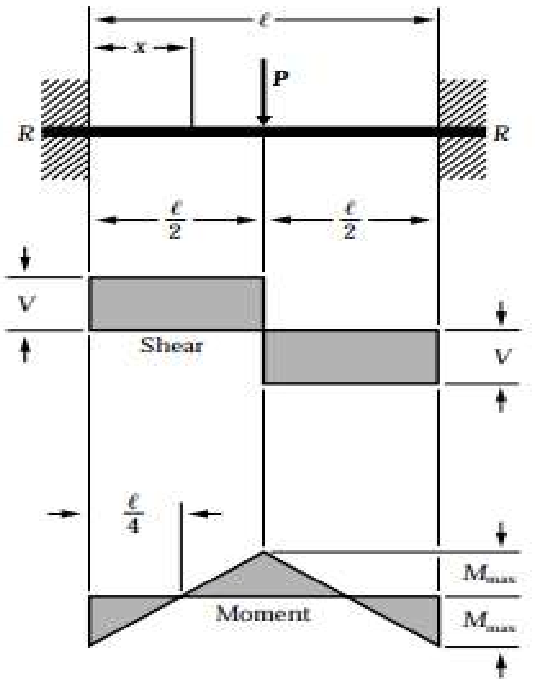
	$V(x) = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ $M(x) = \frac{q}{12}(6lx - l^2 - 6x^2)$ $\Delta(x) = \frac{qx^2}{24EI}(l - x)^2$

Tabela 5

	$V(x) = \frac{P}{2}$ $M(x) = \frac{P}{8}(4x - l)$ $\Delta(x) = \frac{Px^2}{48EI}(3l - 4x)$ $M(x)$ in $\Delta(x)$ v tem primeru veljata za $x < \frac{l}{2}$

4. Zaključek

Nosilci so strukture, ki so sposobne premagovati prečne obremenitve. Ko je nosilec obremenjen se znotraj nosilca pojavi strižna sila ter upogibni moment, ki sta pogojena z geometrijsko postavitvijo. Določitev poteka teh dveh količin je pri statično določenih nosilcih vedno mogoča z uporabo ravnovesnih enačb, za določitev upogibnice pa se poslužimo metode dvojne integracije. Pri statično nedoločenih nosilcih pa je v splošnem potrebno rešiti Euler-Bernoullijevo enačbo, ki podaja odvisnost odmika nosilca vzdolž nosilca pri določeni obremenitvi. Poleg obremenitve in geometrijske postavitve pa na upogib nosilca vpliva še mehanska lastnost materiala imenovana prožnostni modul.

5. Viri

[1] Spletna predavanja, »Structural Analysis Video Lectures«. Dosegljivo: https://www.youtube.com/playlist?list=PLjrNUPGdy6hZT9oBK7_6S--tK_lUE9Xtw. [Dostopano: 26.3.2018]

[2] Spletna stran Wikipedia, »Flexural strength«. Dosegljivo: https://en.wikipedia.org/wiki/Flexural_strength. [Dostopano: 27.3.2018]

[3] Spletna stran Wikipedia »Second moment of area«. Dosegljivo: https://en.wikipedia.org/wiki/Second_moment_of_area. [Dostopano: 28.3.2018]

[4] Spletna stran Wikipedia, »Elastic modulus«. Dosegljivo: https://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_modulus. [Dostopano: 28.3.2018]

[5] Spletna stran Raztezanje plastike, »Raztezanje plastike«. Dosegljivo: http://projlab.fmf.uni-lj.si/arhiv/2010_11/naloge/izdelki/plastenka/teorija.html. [Dostopano: 29.3.2018]

[6] Spletna stran studentski.net, »Nosilci«. Dosegljivo: http://studentski.net/gradivo/ulj_fmf_ma2_mmo_sno_nosilci_01?r=1. [Dostopano: 30. 3. 2018]

[8] Spletna stran The Engineering ToolBox, »Cantilever Beams – Moments and Deflections«. Dosegljivo: https://www.engineeringtoolbox.com/cantilever-beams-d_1848.html. [Dostopano: 30.3.2018]

[9] Spletna stran Wikipedia, »Euler–Bernoulli beam theory«. Dosegljivo: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory. [Dostopano: 30.3.2018]

[9] Spletna stran awc, »Beam design formulas with shear and moment diagrams«. Dosegljivo: http://www.awc.org/pdf/codes-standards/publications/design-aids/AWC-DA6-BeamFormulas-0710.pdf. [Dostopano: 1.4.2018]

[9] Spletna stran StructX, »Beam design formulas«. Dosegljivo: http://www.structx.com/beams.html. [Dostopano: 2.4.2018]

6. Priloge

6.1 Vprašanja za slušatelje

1. **Kako je definiran prožnostni modul, kakšne enote ima in kaj nam pove?**

Prožnostni modul je definiran kot razmerje mehanske napetosti in relativnega raztezka, ki nastane zaradi te napetosti.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Merimo ga v pascalih $[Pa]$. Govori nam o togosti materiala. Bolj kot je material tog, večja sila je potrebna za deformacijo tega materiala.

2. **Zapišite Euler-Bernoullijevo enačbo in razložte kaj predstavlja!**

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2\Delta(x)}{dx^2}\right) = q$$

Enačba povezuje odmik nosilca iz nevtralne lege ter silo, ki ta odmik povzroči.

3. **Kaj pomeni da je nosilec statično določen in kako pristopamo k takim problemom?**

Da je nosilec statično določen, pomeni, da so ravnovesne enačbe dovolj za analitično rešitev. Za take probleme zapišemo ravnovesne enačbe in izrazimo željene količine.

4. **Katera odziva nosilca na obremenitev sta najpomembnejša, kako sta definirana in kateri je pomembnejši za določitev upogibnice?**

Pri obremenjenem nosilcu se pojavi upogibni moment M in strižna sila V. Oba izhajata iz Euler-Bernoullijeve enačbe:

$$M(x) = -EI\frac{d^2\Delta}{dx^2}$$

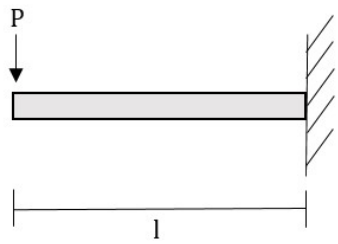
$$V(x) = -\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right)$$

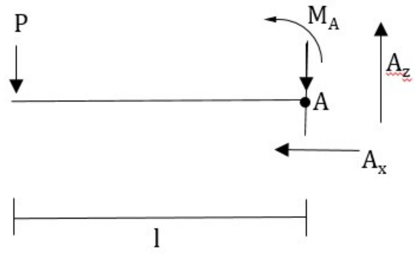
Za izračun upogibnice je mnogo pomembnejši moment. Strižno silo predstavljena (okrnjena!) teorija zanemari, saj se velikokrat to izkaže za dopustno.

6.2 Računska naloga

Na enostransko vpet nosilec dolžine l = 10m deluje na prostem koncu točkasta sila P = 500N. Izpelji funkciji za strižno silo ter upogibni moment vzdolž vodnika, ju nariši ter izračunaj navor v tokči, kjer je ta največji!

Naloge se lotimo z risanjem skice, ki jo nato poenostavino ter označimo reakcijske sile in moment v točki, kjer je vodnik vpet:

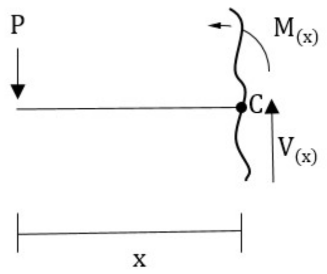




Zapišemo ravnotežne enačbe v točki A, ter izrazimo neznane količine.

$\sum F_x = 0$, v smeri x deluje samo sila Ax, zato je $\boldsymbol{A_x = 0}$.
$\sum F_z = 0$, v smeri z delujeta sila P in reakcijska sila Az. Pišemo: $-P + A_z = 0 \rightarrow \boldsymbol{A_z = P}$.
$\sum M = 0$, navora v točki A sta 2. En zaradi obremenitve, drugi pa kot reakcija na obremenitev. Pišemo: $-M_A - Pl = 0 \rightarrow \boldsymbol{M_A = -Pl}$.

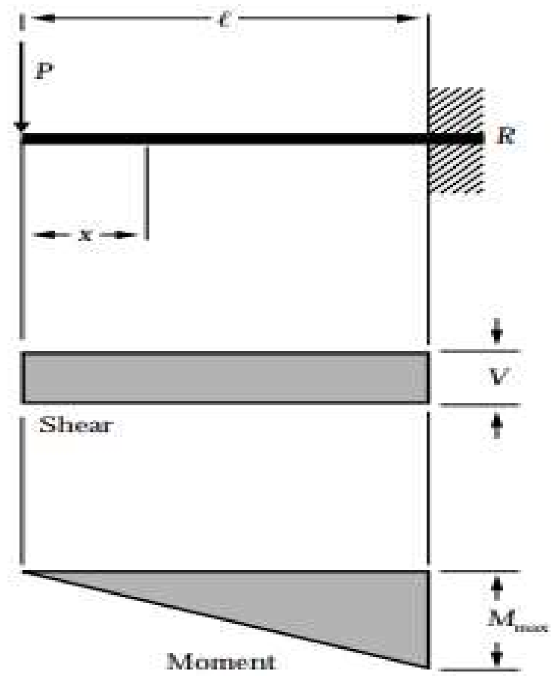
Ko imamo določene reakcije v točki A, nosilec kjerkoli »prerežemo« in postopek ponovimo za katerikoli segment. Opazimo, da bo za nadalnji izračun enostavneje vzeti levi segment in to storimo:



Na mestu, kjer je nosilec »prerezan« označimo moment in strižno silo, tokrat kot funkciji x-a. Spet zapišemo ravnotežne enačbe in izrazimo $M(x)$ in $V(x)$.

$\sum F_z = 0$, v smeri z delujeta sila P in sila $V(x)$ Pišemo: $-P + V(x) = 0 \rightarrow \boldsymbol{V(x) = P}.$
$\sum M = 0$, navora v točki C sta zopet 2. Pišemo: $-M(x) - Px = 0 \rightarrow \boldsymbol{M(x) = -Px}$.

Dobili smo funkciji strižne sile ter momenta. Pa ju narišemo:



Navor je največji v točki $x = l$. Pri danih podatkih izračunamo:

$$M(x = l) = -Pl = -500N \times 10m = -5000\ Nm$$